УДК 004.942

А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58
anoprien@gmail.com, ivanitsa-serg@rambler.ru

Представление интервальных чисел средствами постбинарного кодирования

A.Ja. Anoprienko, S.V. Ivanitsa
Donetsk National Technical University (DonNTU), Ukraine
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58

Representation of Interval Numbers by Means of Postbinary Coding

О.Я. Анопрієнко, С.В. Іваниця
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Представлення інтервальних чисел засобами постбінарного кодування

В статье рассмотрены особенности представления (позиционирования на числовой оси) целочисленных и вещественных интервалов в виде тетракода. Выведены соотношения для получения значений диапазонов «плавающих» границ, т.е. ширины их предельных колебаний. Представлены основные зависимости для определения параметров интервальной оценки и приведены наглядные примеры их реализации.
Ключевые слова: интервал, тетракод, тетрит

Peculiarities of representation (positioning on the number line) for integer and real intervals as tetracode are analyzed in the article. Ratio of ranges of values for “floating” borders, i.e. the width of their marginal fluctuations is deduced. The basic relationships for determining the parameters of interval estimation are shown and illustrative examples for their implementation are given.
Key words: interval, tetracode, tetrit

Розглянуто особливості подання (позиціювання на числовій вісі) цілочислових і дійсних інтервалів у вигляді тетракода. Виведено співвідношення для отримання значень діапазонів «плаваючих» границь, тобто ширини їх граничних коливань. Представлені основні залежності для визначення параметрів інтервальної оцінки та приведені наглядні приклади їх реалізації.
Ключові слова: інтервал, тетракод, тетрит

Введение

Первая волна интенсивного развития цифровых технологий прошла почти исключительно на базе бинарной логики и арифметики. Однако конец XX века ознаменовался лавинообразным нарастанием качественно новых компьютерных технологий. При переходе к новым цифровым технологиям (например, к технологиям параллельных вычислений) особенно остро стала проявляться ограниченность бинарного кодо-логического базиса. Это привело к активации поиска новых путей развития компьютерных технологий, в основе которых закладывается качественный переход

от **бинарного компьютинга**, основывающегося на использовании двоичной логики и двоичной системы счисления, к **постбинарному**, включающего в себя все то, что выходит за рамки двоичной логики и систем счисления, однозначно сводимых к двоичной (по сути точечной и однозначной) системе представления количественной информации.

В контексте кодо-логической эволюции переход к постбинарному компьютингу обусловлен введением в научный оборот таких взаимосвязанных понятий, как **тетралогика** и **тетракоды** [1], что позволило впервые выйти за пределы как одномерного пространства двоичной логики, так и точечного бинарного представления количественной информации. Тетракод как система кодирования количественной информации, построенная на основе тетралогики, может быть выражена различными наборами «тетракодовых» разрядов (тетритов [2]), кодирующих множество состояний двумерного логического пространства [3], [4]. Однако тетракод T с набором тетритов t, такой, что $T = \{t \mid t \in \{0, 1, \mathrm{A}, \mathrm{M}\}\}$, получил более широкое применение в ряде исследований [5-7]. Поэтому в рамках **данной работы** будет рассматриваться тетракод, состоящий из представленного набора тетритов.

На рис. 1 показано как тетрит t сводится к биту b на бинарной оси x_b по событиям s_1 и s_2 – выборкам двоичных значений из тетракода в разные моменты времени. При этом тетриты 0 и 1 (кодирующие состояния «ложь» и «истина» тетралогики) можно назвать **однозначно представимыми** на числовой оси, поскольку их значения сводятся к аналогичным двоичным значениям 0 и 1 в любой момент времени. Это подтверждено идентичностью состояний «истина» и «ложь» тетралогики и классической бинарной логики.

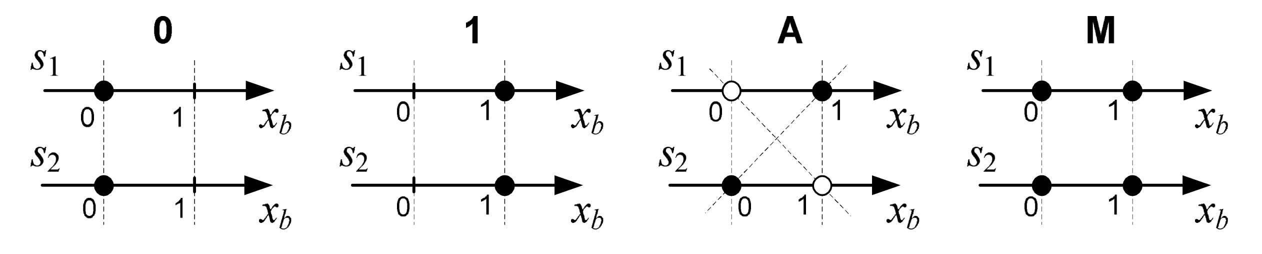


Рисунок 1 – Позиционирование тетритов на числовой оси

Тетриты A и M (кодирующие состояния «неопределенности» и «множественности» тетралогики) относятся к классу **неоднозначно представимых**, поскольку не могут быть однозначно сведены к одному двоичному значению. Тетрит M сводится к паре значений 0 и 1 во всех событиях s_i, т.е. он всегда позиционируется двумя точками на числовой оси. Тетрит A занимает одно случайное двоичное значение 0 или 1 в каждом событии, т.е. он всегда позиционируется одной из двух возможных точек на числовой оси. На рис. 1 тетрит A при наступлении события s_1 был случайным образом сведен к двоичной 1 (с такой же вероятностью он мог бы занять позицию двоичного 0), а при наступлении события s_2 принял значение двоичного нуля (с такой же вероятностью он мог бы сохранить предыдущее значение от события s_1). Данный аспект представления тетрита A позволяет эффективно кодировать состояния тетралогики, обладающие свойствами равновероятности, а при совокупности множества выборок – свойствами случайности.

Наличие тетритов M в тетракоде предполагает его сведение к множеству двоичных значений, т.е. фактически к замкнутому числовому промежутку. Такой числовой промежуток называется интервалом, который представляет собой множество всех зна-

чений, лежащих внутри его границ [8]. Очевидно, что кодирование границ вещественных интервалов в виде тетракода возможно лишь в том случае, если в нем присутствуют разряды М, которые являются определяющим фактором выявления интервальных границ. В таком тетракоде допускается наличие тетритов А, которые являются уточняющим фактором при выявлении интервальных границ и занимают младшие разряды тетракода, уменьшая тем самым погрешность представления закодированных в тетракоде количественных значений.

Описанная выше структура тетракода с позиции расположения тетритов М и А наделяет его так называемой **нормированностью**, определенной совокупностью следующих критериев:

1. Тетриты 0 и 1 являются основной информационной составляющей и фактически определяют позицию числа на числовой оси.
2. Наличие «группы М» – наличие тетрита или группы тетритов М обязательно для представления границ интервала: группа М неразрывна и располагается в младших разрядах тетракода.
3. Наличие «группы А» – наличие тетрита или группы тетритов А необязательно, однако носит уточняющий характер для представления границ интервала: группа А неразрывна и занимает более младшие разряды тетракода, чем группа М.
4. Между группами М и А не допускается появления однозначно представимых тетритов 0 и 1.

Все представленные в работе результаты будут справедливы только для нормированных тетракодов, причем тетракод, содержащий в себе группу М, обладает нормированностью первого рода, а содержащий в себе группы М и А – нормированностью второго рода.

Целью данной работы является реализация возможности использования нормированного тетракода для кодирования значений границ интервальных чисел в одном поле данных, т.е. фактически решается задача, обратная задаче предложенной в [4], в которой рассматривались особенности перехода от интервального представления результатов вычислений к постбинарным. При этом предполагается, что определение диапазонов «плавающих» границ и ширины интервального числа, представленного нормированным тетракодом первого и второго рода, является достаточным условием для оценки эффективности и точности позиционирования границ при постбинарном кодировании интервалов. Рассмотренная концепция может послужить началом развития средств и методов постбинарных вычислений, которые смогут позиционироваться как математическая дисциплина, предметом которой является решение задач с постбинарными интервальными неопределенностями и неоднозначностями в данных, возникающими в постановке задачи или на промежуточных стадиях процесса решения.

Формирование целочисленных интервальных значений

Пусть X – целочисленный интервал (интервальное число), такой, что

$$X = [x_{-};\ x_{+}] = \{x \mid x_{-} \le x \le x_{+}\}, \qquad (1)$$

где x_{-} и x_{+} – его левая и правая границы, причем все значения x интервала принадлежат области целых чисел: $x \in \mathbf{Z}$.

«Размах» границ интервала определяет его ширину w, которая выражается следующим соотношением:

$$w = x_{+} - x_{-} \ge 0. \qquad (2)$$

Ширина интервала является важнейшей его характеристикой, поскольку является естественной мерой неопределенности (неоднозначности) величины, выраженной интервальным числом.

Рассмотрим нормированный тетракод первого рода, т.е. тетракод, содержащий группу М, содержащий группу М в младших разрядах. При сведении такого тетракода к множеству двоичных значений, границы интервала определены крайними позициями этого множества: левая граница – при всех значениях М, сведенных в двоичный ноль; правая граница – при всех значениях М, сведенных в двоичную единицу. При этом ширина полученного интервала может быть вычислена по формуле (2), но поскольку однозначно представимые в исходном тетракоде тетриты 0 и 1 самоуничтожатся операцией вычитания, оценку ширины закодированного интервала можно получить не используя численные значения x_- и x_+ (рис. 2, *а*). Так как значение тетракода сводится к отображению двоичных чисел, а двоичная система счисления является позиционной, то ширина полученного интервала зависит, прежде всего, от позиции группы М в тетракоде, а точнее – от позиции старшего тетрита поля М. Поэтому

$$w = 2^{k+1} - 1, \tag{3}$$

где k – позиция старшего тетрита t = M в n-разрядном тетракоде: $n-1 \le k \le 0$.

Тетракод с нормированностью второго рода при сведении его к границам интервального числа предполагает определение расстояния q между значениями минимально и максимально возможных границ интервала ($x_-^{\min}$, $x_+^{\min}$ и $x_-^{\max}$, $x_+^{\max}$), имеющих ширину w_1 и w_2 соответственно (рис. 2, *б*):

$$q = x_-^{\max} - x_-^{\min} = x_+^{\max} - x_+^{\min}. \tag{4}$$

Фактически величина q является расстоянием между двумя интервалами шириной w_1 и w_2, т.е. расстоянием на множестве $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$ целочисленных и вещественных интервалов (поскольку $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$, то множество целочисленных интервалов $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z})$ также является подмножеством множества $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$, т.е. $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z}) \subset \boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$). Отображение q на множестве $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$ задает метрику, которая является **хаусдорфовой** [8, с. 23]. Хаусдорфова метрика обобщает понятие расстояния между двумя точками в замкнутом метрическом пространстве (в данном контексте таким пространством является множество $\boldsymbol{R}$) на случай пространства всех компактных непустых подмножеств данного пространства. При введении на множестве $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$ метрики оно становится топологическим пространством с сохранением понятий сходимости и непрерывности, как и в случае метрического пространства.

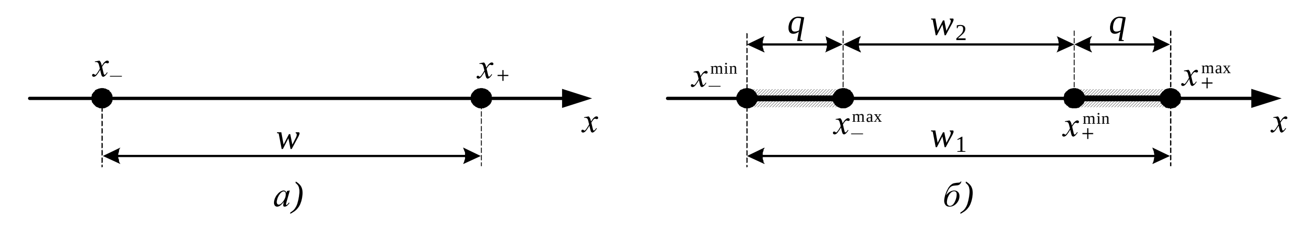


Рисунок 2 – Формирование целочисленных интервальных границ при декодировании нормированного тетракода первого (*а*) и второго (*б*) рода

При сведении к интервальным границам тетракода, обладающего свойствами нормированности второго рода, расстояние w_1 между крайними точками $x_-^{\min}$ и $x_+^{\max}$ определяется аналогично (3), поскольку поле А сводится к двоичным значениям, как и в

поле М (все нули для левой и все единицы для правой границ интервала): $w_1 = w$. Расстояние w_2 между точками $x_-^{\max}$ и $x_+^{\min}$ связано с w_1 соотношением $w_1 = w_2 - 2q$. Точки $x_-^{\min}$ и $x_+^{\max}$ сформированы с позиции учета погрешности, вносимой в значения границ полем А тетракода. При этом максимальное значение q достигается для границ следующим образом:

– для левой границы: при минимальном значении поля М (все тетриты М сводятся к двоичному 0) значение поля А – максимально (все тетриты А принимают значения двоичной 1);

– для правой границы: при максимальном значении поля М (все тетриты М сводятся к двоичной 1) значение поля А – минимально (все тетриты А принимают значения двоичного 0).

Такая концепция предполагает определение параметров w_1 и q, при которых представленные тетракодом границы интервала будут находиться в выделенных на рис. 2, *б* участках числовой оси.

Поскольку на длину q оказывает влияние только значение, возвращаемое полем А тетракода, то ее можно выразить через позицию старшего тетрита поля А:

$$q = 2^{l+1} - 1, \tag{5}$$

где l – позиция старшего тетрита t = А в n-разрядном тетракоде: $k-1 \le l \le 0$ (k – позиция старшего тетрита t = М)

При этом значение w_2 можно определить следующим образом:

$$w_2 = w_1 - 2q = 2^{k+1} - 1 - 2\cdot(2^{l+1} - 1) = 2^{k+1} - 2^{l+2} + 1.$$

При этом возможный диапазон «плавания» границ интервала, обусловленный заполнением поля А случайными двоичными значениями, определяется следующим образом:

1) $[\,x_-^{\min}; x_-^{\max}\,] = [\,x_-^{\max} - q\,; x_-^{\max}\,] = [\,x_-^{\min}; x_-^{\min} + q\,]$ – для левой границы;

2) $[\,x_+^{\min}; x_+^{\max}\,] = [\,x_+^{\max} - q\,; x_+^{\max}\,] = [\,x_+^{\min}; x_+^{\min} + q\,]$ – для правой границы.

В качестве примера можно выполнить сведение 8-разрядного тетракода T с нормированностью второго рода к интервалу X: $T \to X$. Пусть T = 101ММААА, тогда $k = 4$, $l = 2$. Получим возможный разброс границ $q = 2^3 - 1 = 7$ и максимально возможную ширину $w_1 = 2^5 - 1 = 31$. Таким образом, при любой выборке (наступлении события s_i) с учетом возвращенного полем А случайного набора двоичных чисел, ширина интервала будет не больше $w_1 = 31$ и не меньше $w_2 = 31 - 2\cdot 7 = 17$.

Выполним проверку (↓ — сведение к двоичному 0, ↑ — к двоичной 1):

$$X^{\max} = [x_-^{\min};\ x_+^{\max}] = [101\ \underbrace{00}_{all\,\text{M}\downarrow}\ \underbrace{000}_{all\,\text{A}\downarrow};\ 101\ \underbrace{11}_{all\,\text{M}\uparrow}\ \underbrace{111}_{all\,\text{A}\uparrow}]_2 = [160;\ 191]_{10}.$$

$$X^{\min} = [x_-^{\max};\ x_+^{\min}] = [101\ \underbrace{00}_{all\,\text{M}\downarrow}\ \underbrace{111}_{all\,\text{A}\uparrow};\ 101\ \underbrace{11}_{all\,\text{M}\uparrow}\ \underbrace{000}_{all\,\text{A}\downarrow}]_2 = [167;\ 184]_{10}.$$

Из (4) получаем $q = 160 - 167 = 191 - 184 = 7$. Диапазон «плавания» границ интервала X: [160; 167] – для левой границы; [184; 191] – для правой границы

Формирование вещественных интервальных значений

При сведении тетритов n-разрядного «вещественного» тетракода T' (условно разделенного на поля знака, порядка и мантиссы) к вещественному интервалу X' ($X' = [x_-;\ x_+] = \{x \mid x_- \le x \le x_+\},\ x \in \boldsymbol{R}$) все оценки возможного размаха интервальных границ определяются аналогично описанным выше целочисленным представлением. Однако сведение тетракода T' к двоичным значениям определяет их формат как формат с плавающей запятой. При этом для расчета ширины предполагаемых диапазонов, а также расстояния между ними следует учитывать некоторые дополнительные параметры: значение порядка, его смещение, а также количество разрядов мантиссы. В таком случае ширина максимально и минимально представимого интервала из T' – w', w_1' и w_2' – определена следующими соотношениями (F – коэффициент, учитывающий особенности формата представления чисел с плавающей запятой):

$$w' = F \cdot w; \tag{6}$$

$$w_1' = F \cdot w_1; \tag{7}$$

$$w_2' = F \cdot w_2. \tag{8}$$

Зависимость (6) применима для тетракода с нормированностью первого рода, а зависимости (7), (8) – для тетракода с нормированностью второго рода. Все правила нормированности для «вещественного» тетракода относятся только к полю мантиссы и не предполагают появления неоднозначно представимых тетритов ($t \in \{\mathrm{A}, \mathrm{M}\}$) в поле порядка.

С учетом специфичности форматов чисел с плавающей запятой, «вещественный» тетракод может сводиться к значениям интервальных границ, входящих в области нормализованных (имеющих ненулевое значение в поле порядка) и денормализованных (имеющих нулевое значение в поле порядка) чисел с плавающей запятой [9]. Рассматривать иные особые случаи представления чисел плавающих форматов (не число: NaN; положительная и отрицательная бесконечности: $+\infty$ и $-\infty$) не имеет смысла, так как параметры таких интервалов изначально известны: [NaN; NaN], $[\mathrm{NaN}; -\infty]$ и $[+\infty; \mathrm{NaN}]$ имеют ширину w = NaN; $[-\infty; +\infty]$ имеет ширину $w = +\infty$. Интервалы $[+\infty; +\infty]$ и $[-\infty; -\infty]$ задать с помощью нормированного тетракода невозможно, так как данные интервалы точечные (границы интервалов совпадают), т.е. в плавающих форматах представляют точку на числовой прямой. Таким образом, коэффициент F может быть представлен только в двух вариантах: для нормализованных (F_1) и денормализованных (F_2) чисел:

$$F_1 = 2^{E - \exp - m}, \tag{9}$$

$$F_2 = 2^{1 - \exp - m}, \tag{10}$$

где E – десятичное значение экспоненты двоичного числа, m – количество двоичных разрядов мантиссы (в 32-битном IEEE-754 m = 23, в 64-битном – m = 52), exp = $2^{b-1} - 1$ – заданное смещение экспоненты, имеющей b двоичных разрядов (в 32-битном IEEE-754 оно равно +127, в 64-битном – +1023).

На основании (6) – (10) получаем основные зависимости (k и l – номера старших разрядов полей М и А соответственно):

– для нормализованных чисел:

$$w_1' = w' = 2^{E - \exp - m} \cdot (2^{k+1} - 1); \tag{11}$$

$$w_2' = 2^{E-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 2^{l+2} + 1); \qquad (12)$$

$$q' = F_1 \cdot q = \frac{1}{2} \cdot (w_1' - w_2') = 2^{E-\exp-m} \cdot (2^{l+1} - 1), \qquad (13)$$

– для денормализованных чисел:

$$w_1' = w' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 1); \qquad (14)$$

$$w_2' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 2^{l+2} + 1); \qquad (15)$$

$$q' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{l+1} - 1). \qquad (16)$$

В качестве примера можно выполнить сведение 32-разрядного «вещественного» тетракода T' с нормированностью второго рода к интервалу X': $T' \to X'$.

Пусть T' = 1 01111100 10110111001MMMMAAAAAAAA.

Все числа, сводимые данным тетракодом, представляют множество нормализованных чисел с плавающей запятой. Получаем исходные данные: $k = 11$, $l = 7$, $m = 23$, exp = 127, $E = 01111100_2 = 124_{10}$. Используя зависимости (11) – (13), рассчитаем возможный разброс границ интервала:

$$q' = 2^{124-127-23} \cdot (2^8 - 1) = 2^{-26} \cdot 255 = \frac{255}{67108864} = 3,7997961... \cdot 10^{-6} \approx 3,8 \cdot 10^{-6};$$

$$w_1' = 2^{-26} \cdot (2^{12} - 1) = \frac{4095}{67108864} = 6,10202550... \cdot 10^{-5};$$

$$w_2' = 2^{-26} \cdot (2^{12} - 2^9 + 1) = \frac{3585}{67108864} = 5,53420663... \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, при любой выборке (наступлении события s_i) с учетом возвращения полем A случайного набора двоичных чисел, ширина интервала не превысит значение $6,10202550 \cdot 10^{-5}$ и не станет меньше чем $5,53420663 \cdot 10^{-5}$.

Выполним проверку с учетом того, что данный T' сводится к отрицательным числам. Следовательно, числа с большим модулем находятся на отрицательной части числовой оси левее, чем числа с меньшим модулем. Учитывая данную особенность отрицательных чисел, границы максимально и минимально представимых диапазонов формируются следующим образом (↓ – сведение к двоичному нулю, ↑ – сведение к двоичной единице):

$$X'^{\max} = [x_-'^{\min};\ x_+'^{\max}] =$$
$$= [1\ 01111100\ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,M\uparrow}\underbrace{11111111}_{all\,A\uparrow};$$
$$1\ 01111100\ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,M\downarrow}\underbrace{00000000}_{all\,A\downarrow}]_2 =$$
$$= [-0,21447752;\ -0,21441650]_{10}.$$

$$X'^{\min} = [x_-'^{\max};\ x_+'^{\min}] =$$
$$= [1\ 01111100\ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,M\uparrow}\underbrace{00000000}_{all\,A\downarrow};$$
$$1\ 01111100\ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,M\downarrow}\underbrace{11111111}_{all\,A\uparrow}]_2 =$$
$$= [-0,21447372;\ -0,21442030]_{10}.$$

Из (4) получаем

$q' = -0,21447372 + 0,21447752 = -0,21441650 + 0,21442030 = 3,8 \cdot 10^{-6}$.

Диапазон «плавания» границ интервала X':

– $[-0,21447752; -0,21447372]$ –для левой границы;

– $[-0,21442030; -0,21441650]$ – для правой границы

Описанная в данном разделе методика сведения *n*-разрядного нормированного «вещественного» тетракода к вещественному интервалу приводит к извлечению границ интервала одного знака, т.е. к таким интервальным числам, которые могут занимать позиции либо на положительной, либо на отрицательной полуосях вещественных чисел. Следовательно, данная техника кодирования не является достаточной, поскольку исключает представление интервала, содержащего нулевое значение. Таким образом, для представления интервала X'' ($X'' = [x_-;\ x_+] = \{x \mid x_- \le x \le x_+\},\ x \in \boldsymbol{R},\ 0 \in X''$) формируется нормированный «вещественный» тетракод T'', содержащий в поле знака тетрит $t = \text{M}$. Такой тетракод отвечает обозначенным требованиям к нормированности (относящихся прежде всего к полю мантиссы) и сводится к интервальным границам, аналогично описанной выше методике, однако при формировании левой границы тетрит М в поле знака сводится к двоичной 1 (формируется отрицательное значение), а при формировании правой границы – к двоичному 0 (формируется положительное значение).

На рис. 3 представлены соотношения интервалов X'' и X', декодированных из идентичных «вещественных» тетракодов T' (в поле знака однозначно представимые значения тетритов 0 ($X' > 0$) или 1 ($X' < 0$)) и T'' (в поле знака значение М) с идентичными значениями полей мантиссы и порядка. Поскольку интервал X'' объединяет зеркальное отображение интервала X' на отрицательной и положительной полуосях, то интервальные оценки данных интервалов связаны, и основная оценка – расстояние d'' – определима следующим образом: $d'' = w_1'$.

Следовательно,

– для нормализованных чисел:

$$d'' = 2^{E-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 1); \tag{17}$$

– для денормализованных чисел:

$$d'' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 1). \tag{18}$$

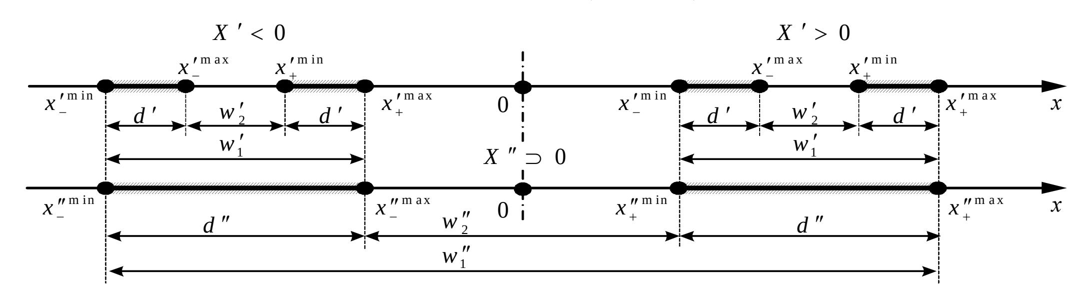


Рисунок 3 – Формирование вещественных интервальных границ для интервала, содержащего нулевое значение

Значения ширины w_1'' и w_2'' зависят от всех разрядов поля мантиссы в тетракоде (в первую очередь от однозначно представимых значений тетритов, поскольку при нахождении расстояния между границами интервала с противоположными знаками их значения складываются) и принимают различные значения в каждом отдельном случае. И, наконец, если интервал X'' представлен тетракодом T'' с нормированностью первого

рода, то середина такого интервала будет всегда равна нулевому значению, что обусловлено симметричному расположению границ интервала относительно нуля. При использовании «вещественного» тетракода T'' с нормированностью второго рода такая симметрия будет нарушена, поскольку для каждой из границ все тетриты поля А будут сводиться к различным наборам двоичных чисел.

Появление тетрита М в знаковом разряде переопределяет принципы получения минимально и максимально допустимых значений границ интервала. Однако стоит отметить одинаковость поведения полей М и А, поэтому в формулах (17) – (18) не используется значение l – позиция старшего тетрита А.

Для наглядного представления описанных выше положений рассмотрим сведение 32-разрядного «вещественного» тетракода T'' (аналогичного T' из предыдущего примера) к интервалу X'': $T'' \to X''$.

Пусть T'' = M 01111100 10110111001MMMMAAAAAAAA.

Получаем исходные данные: $k = 11$, $m = 23$, $\exp = 127$, $E = 01111100_2 = 124_{10}$. Используя зависимости (11) – (13) рассчитаем возможный разброс границ интервала:

$$q'' = 2^{124-127-23} \cdot (2^{12} - 1) = \frac{4095}{2^{-26}} = 6{,}10202550...\cdot 10^{-5} \approx 6{,}102 \cdot 10^{-5}.$$

Выполним проверку (↓ – сведение к двоичному нулю, ↑ – сведение к двоичной единице):

$$\begin{aligned} X''^{\max} &= [x''^{\min}_-;\ x''^{\max}_+] = \\ &= [\underbrace{1}_{M\uparrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,M\uparrow}\underbrace{11111111}_{all\,A\uparrow};\\ &\quad \underbrace{0}_{M\downarrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,M\uparrow}\underbrace{11111111}_{all\,A\uparrow}]_2 = \\ &= [-0{,}21447752;\ 0{,}21447752]_{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X''^{\min} &= [x''^{\max}_-;\ x''^{\min}_+] = \\ &= [\underbrace{1}_{M\uparrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,M\downarrow}\underbrace{00000000}_{all\,A\downarrow};\\ &\quad \underbrace{0}_{M\downarrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,M\downarrow}\underbrace{00000000}_{all\,A\downarrow}]_2 = \\ &= [-0{,}21441650;\ 0{,}21441650]_{10}. \end{aligned}$$

Из (4) получаем

$$q'' = -0{,}21441650 + 0{,}21447752 = 0{,}21447752 - 0{,}21441650 = 6{,}102 \cdot 10^{-5}.$$

Диапазон «плавания» границ интервала X'':

– $[-0{,}21447752; -0{,}21441650]$ – для левой границы;

– $[0{,}21441650; 0{,}21447752]$ – для правой границы

Выводы

В данной работе рассмотрены особенности сведения нормированных тетракодов к значениям границ интервалов. Используя выведенные в работе соотношения, можно провести интервальное оценивание и получить необходимые метрики интервального числа, границы которого представлены тетракодом, не прибегая к его декодированию в

двоичные/десятичные значения. При этом показана возможность эффективного хранения интервальных чисел в виде тетракодов с возможностью их дальнейшего использования в постбинарных компьютерных системах.

Актуальность работы в плане практической реализации нацелена на недалекое будущее, в котором внедрение средств постбинарного компьютинга несомненно приведет к развитию множества математических структур, в числе которых может оказаться и постбинарная интервальная арифметика как структура, определившая арифметические интервальные операции для нормированных тетракодов. Такая структура сможет использовать тетракоды в качестве операндов и применять к ним постбинарные логические и арифметические операции, реализация которых уже сегодня заложена в основу разработки алгебры тетралогики [6], [7].

Литература

1. Аноприенко А.Я. Тетралогика и тетракоды / А.Я. Аноприенко // Сборник трудов факультета вычислительной техники и информатики. – Донецк : ДонГТУ, 1996. – Вып. 1. – С.32-43.
2. Иваница С.В. Особенности реализации операций тетралогики / С.В. Иваница, А.Я. Аноприенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Вып. 13 (185). – Донецк : ДонНТУ, 2011. – С. 134-140. – (Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2011)).
3. Аноприенко А.Я. Обобщенный кодо-логический базис в вычислительном моделировании и представлении знаний: эволюция идеи и перспективы развития / А.Я. Аноприенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Донецк : ДонНТУ, 2005. – Вып. 93. – С. 289-316. – (Серия «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2005)).
4. Аноприенко А.Я. Археомоделирование: модели и инструменты докомпьютерной эпохи / А.Я. Аноприенко. – Донецк : УНИТЕХ, 2007. – 318 с.
5. Аноприенко А.Я. Особенности постбинарного кодирования на примере интервального представления результатов вычислений по формуле Бэйли-Боруэйна-Плаффа / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Научные труды Донецкого национального технического университета.– Донецк : ДонНТУ, 2010. – Вып. 11 (164). – С. 19-23. – (Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2010)).
6. Аноприенко А.Я. Особенности реализации операций тетралогики / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Донецк : ДонНТУ, 2011. – Вып. 13 (185). – С. 134-140. – (Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2011)).
7. Аноприенко А.Я. Особенности реализации постбинарных логических операций / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Искусственный интеллект. – 2011. – № 2. – С. 110-121.
8. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – Москва : Мир, 1987.
9. Фролов А.В. Аппаратное обеспечение персонального компьютера / А.В. Фролов, Г.В. Фролов // Библиотека системного программиста.– М. : Диалог-МИФИ, 1997. – Т. 33. – 304 с.

Literatura

1. Anoprienko A.Ja. Sbornik trudov fakul'teta vychislitel'noj tehniki i informatiki.Vyp. 1. Doneck. DonGTU, 1996, S. 32-43
2. Ivanica S.V., Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional’nogo tehnicheskogo universiteta. Serija: “Informatika, kibernetika i vychislitel’naj atehnika” (IKVT–2011). Vypusk 13 (185).Doneck: DonNTU. 2011. S. 134-140
3. Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional’nogo tehnicheskogo universiteta. Serija “Informatika, kibernetika i vychislitel’naja tehnika” (IKVT-2005).Vypusk 93. Doneck: DonNTU. 2005. S. 289-316.
4. Anoprienko A.Ja. Arheomodelirovanie: modeliiinstrumentydokomp'juternojjepohi.Doneck: UNITEH. 2007. 318 s.

5. AnoprienkoA.Ja.,Ivanica S.V. NauchnyetrudyDoneckogonacional’nogotehnicheskogouniversiteta. Serija: “Informatika, kibernetikaivychislitel’najatehnika» (IKVT-2010). Vypusk 11 (164).Doneck: DonNTU. 2010. S. 19-23.
6. Ivanica S.V., Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional’nogo tehnicheskogo universiteta. Serija: “Informatika, kibernetika i vychislitel’naja tehnika” (IKVT-2011). Vypusk 13 (185). Doneck: DonNTU. 2011. S. 134-140.
7. Anoprienko A.Ja.,Ivanica S.V. Iskusstvennyj intellect. № 2. 2011. S. 110-121.
8. Alefel’d G., Hercberger Ju. Vvedenie v interval’nye vychislenija.Moskva: Mir. 1987.
9. Frolov A.V., Frolov G.V. Apparatnoe obespechenie personal’nogo komp’jutera. Biblioteka sistemnogo programmista. Tom 33. M.: Dialog-MIFI. 1997. 304 s.

A.Ja. Anoprienko, S.V. Ivanitsa

Representation of Interval Numbers by Means of Postbinary Coding

Peculiarities of representation (positioning on the number line) for integer and real intervals as tetracode are analyzed in the article. Ratio of ranges of values for “floating” borders, i.e. the width of their marginal fluctuations is deduced. The basic relationships for determining the parameters of interval estimation are shown and illustrative examples for their implementation are given.

Availability of M-tetrits in tetracode involves its reduction to a set of binary values, i.e., virtually closed numerical gap. This numerical gap is called an interval, which is a set of values that lie within its borders.

The structure of tetracode with position of location tetrits M- and A-tetrits gives it the so-called regulation, which is determined by combination of the following criteria:

- Tetrits 0 and 1 are main components of the information and actually determine the position of numbers in the number line;
- Presence of “M-group”. The presence of tetrit or a group of M-tetrits requires the represence of bounds of the interval: M-group is indissoluble and is located in the junior ranks of tetracode;
- Presence of “A-group”. The presence of tetrit or a group of A-tetrits is optional, but it has clarifying character for represence of bounds of the interval: A-group is indissoluble and has a lower level of tetracode than M-group has;
- Between M- and A-groups, it is not allowed appearance of uniquely representable tetrits 0 and 1.

This article describes features for obtaining of normalized tetracodes to values of boundaries of intervals. Using the derived relations, one can work to interval estimation and obtain metric of an interval, which boundaries are tetracode, without decoding it into binary/decimal values. At the same time, the possibility for efficient storage of interval numbers as tetracode with possibility of their further use in postbinary computer systems is shown.

Relevance of this work in terms of practical implementation is aimed at not too distant future, in which the introduction of postbinary computing will undoubtedly lead to the development of a set of mathematical structures, among which may be an interval arithmetic and postbinary as a structure that defined the interval arithmetic operations for normalized tetracode. Such a structure can be used as tetracode operands, and apply postbinary logical and arithmetic operations that is already today the basis for development of tetralogic algebra.

Статья поступила в редакцию 19.12.2011.

УДК 004.942

А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58
anoprien@gmail.com, ivanitsa-serg@rambler.ru

Представление интервальных чисел средствами постбинарного кодирования

A.Ja. Anoprienko, S.V. Ivanitsa
Donetsk National Technical University (DonNTU), Ukraine
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58

Representation of Interval Numbers by Means of Postbinary Coding

О.Я. Аноприєнко, С.В. Іваниця
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Представлення інтервальних чисел засобами постбінарного кодування

В статье рассмотрены особенности представления (позиционирования на числовой оси) целочисленных и вещественных интервалов в виде тетракода. Выведены соотношения для получения значений диапазонов «плавающих» границ, т.е. ширины их предельных колебаний. Представлены основные зависимости для определения параметров интервальной оценки и приведены наглядные примеры их реализации.
Ключевые слова: интервал, тетракод, тетрит

Peculiarities of representation (positioning on the number line) for integer and real intervals as tetracode are analyzed in the article. Ratio of ranges of values for “floating” borders, i.e. the width of their marginal fluctuations is deduced. The basic relationships for determining the parameters of interval estimation are shown and illustrative examples for their implementation are given.
Key words: interval, tetracode, tetrit

Розглянуто особливості подання (позиціювання на числовій вісі) цілочислових і дійсних інтервалів у вигляді тетракода. Виведено співвідношення для отримання значень діапазонів «плаваючих» границь, тобто ширини їх граничних коливань. Представлені основні залежності для визначення параметрів інтервальної оцінки та приведені наглядні приклади їх реалізації.
Ключові слова: інтервал, тетракод, тетрит

Введение

Первая волна интенсивного развития цифровых технологий прошла почти исключительно на базе бинарной логики и арифметики. Однако конец XX века ознаменовался лавинообразным нарастанием качественно новых компьютерных технологий. При переходе к новым цифровым технологиям (например, к технологиям параллельных вычислений) особенно остро стала проявляться ограниченность бинарного кодо-логического базиса. Это привело к активации поиска новых путей развития компьютерных технологий, в основе которых закладывается качественный переход

от **бинарного компьютинга**, основывающегося на использовании двоичной логики и двоичной системы счисления, к **постбинарному**, включающего в себя все то, что выходит за рамки двоичной логики и систем счисления, однозначно сводимых к двоичной (по сути точечной и однозначной) системе представления количественной информации.

В контексте кодо-логической эволюции переход к постбинарному компьютингу обусловлен введением в научный оборот таких взаимосвязанных понятий, как **тетралогика** и **тетракоды** [1], что позволило впервые выйти за пределы как одномерного пространства двоичной логики, так и точечного бинарного представления количественной информации. Тетракод как система кодирования количественной информации, построенная на основе тетралогики, может быть выражена различными наборами «тетракодовых» разрядов (тетритов [2]), кодирующих множество состояний двумерного логического пространства [3], [4]. Однако тетракод T с набором тетритов t, такой, что $T = \{t \mid t \in \{0, 1, \mathrm{A}, \mathrm{M}\}\}$, получил более широкое применение в ряде исследований [5-7]. Поэтому в рамках **данной работы** будет рассматриваться тетракод, состоящий из представленного набора тетритов.

На рис. 1 показано как тетрит t сводится к биту b на бинарной оси x_b по событиям s_1 и s_2 – выборкам двоичных значений из тетракода в разные моменты времени. При этом тетриты 0 и 1 (кодирующие состояния «ложь» и «истина» тетралогики) можно назвать **однозначно представимыми** на числовой оси, поскольку их значения сводятся к аналогичным двоичным значениям 0 и 1 в любой момент времени. Это подтверждено идентичностью состояний «истина» и «ложь» тетралогики и классической бинарной логики.

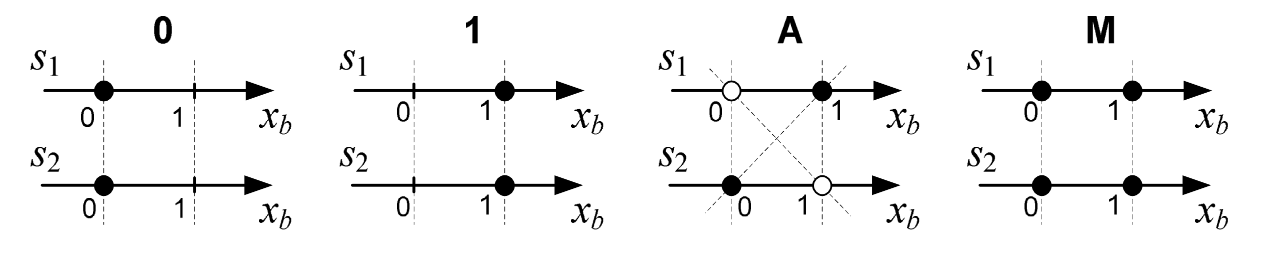


Рисунок 1 – Позиционирование тетритов на числовой оси

Тетриты А и М (кодирующие состояния «неопределенности» и «множественности» тетралогики) относятся к классу **неоднозначно представимых**, поскольку не могут быть однозначно сведены к одному двоичному значению. Тетрит М сводится к паре значений 0 и 1 во всех событиях s_i, т.е. он всегда позиционируется двумя точками на числовой оси. Тетрит А занимает одно случайное двоичное значение 0 или 1 в каждом событии, т.е. он всегда позиционируется одной из двух возможных точек на числовой оси. На рис. 1 тетрит А при наступлении события s_1 был случайным образом сведен к двоичной 1 (с такой же вероятностью он мог бы занять позицию двоичного 0), а при наступлении события s_2 принял значение двоичного нуля (с такой же вероятностью он мог бы сохранить предыдущее значение от события s_1). Данный аспект представления тетрита А позволяет эффективно кодировать состояния тетралогики, обладающие свойствами равновероятности, а при совокупности множества выборок – свойствами случайности.

Наличие тетритов М в тетракоде предполагает его сведение к множеству двоичных значений, т.е. фактически к замкнутому числовому промежутку. Такой числовой промежуток называется интервалом, который представляет собой множество всех зна-

чений, лежащих внутри его границ [8]. Очевидно, что кодирование границ вещественных интервалов в виде тетракода возможно лишь в том случае, если в нем присутствуют разряды М, которые являются определяющим фактором выявления интервальных границ. В таком тетракоде допускается наличие тетритов А, которые являются уточняющим фактором при выявлении интервальных границ и занимают младшие разряды тетракода, уменьшая тем самым погрешность представления закодированных в тетракоде количественных значений.

Описанная выше структура тетракода с позиции расположения тетритов М и А наделяет его так называемой **нормированностью**, определенной совокупностью следующих критериев:

1. Тетриты 0 и 1 являются основной информационной составляющей и фактически определяют позицию числа на числовой оси.

2. Наличие «группы М» – наличие тетрита или группы тетритов М обязательно для представления границ интервала: группа М неразрывна и располагается в младших разрядах тетракода.

3. Наличие «группы А» – наличие тетрита или группы тетритов А необязательно, однако носит уточняющий характер для представления границ интервала: группа А неразрывна и занимает более младшие разряды тетракода, чем группа М.

4. Между группами М и А не допускается появления однозначно представимых тетритов 0 и 1.

Все представленные в работе результаты будут справедливы только для нормированных тетракодов, причем тетракод, содержащий в себе группу М, обладает нормированностью первого рода, а содержащий в себе группы М и А – нормированностью второго рода.

Целью данной работы является реализация возможности использования нормированного тетракода для кодирования значений границ интервальных чисел в одном поле данных, т.е. фактически решается задача, обратная задаче предложенной в [4], в которой рассматривались особенности перехода от интервального представления результатов вычислений к постбинарным. При этом предполагается, что определение диапазонов «плавающих» границ и ширины интервального числа, представленного нормированным тетракодом первого и второго рода, является достаточным условием для оценки эффективности и точности позиционирования границ при постбинарном кодировании интервалов. Рассмотренная концепция может послужить началом развития средств и методов постбинарных вычислений, которые смогут позиционироваться как математическая дисциплина, предметом которой является решение задач с постбинарными интервальными неопределенностями и неоднозначностями в данных, возникающими в постановке задачи или на промежуточных стадиях процесса решения.

Формирование целочисленных интервальных значений

Пусть X – целочисленный интервал (интервальное число), такой, что

$$X = [x_-;\ x_+] = \{x \mid x_- \le x \le x_+\}, \qquad (1)$$

где x_- и x_+ – его левая и правая границы, причем все значения x интервала принадлежат области целых чисел: $x \in \boldsymbol{Z}$.

«Размах» границ интервала определяет его ширину w, которая выражается следующим соотношением:

$$w = x_+ - x_- \ge 0. \qquad (2)$$

Ширина интервала является важнейшей его характеристикой, поскольку является естественной мерой неопределенности (неоднозначности) величины, выраженной интервальным числом.

Рассмотрим нормированный тетракод первого рода, т.е. тетракод, содержащий группу М, содержащий группу М в младших разрядах. При сведении такого тетракода к множеству двоичных значений, границы интервала определены крайними позициями этого множества: левая граница – при всех значениях М, сведенных в двоичный ноль; правая граница – при всех значениях М, сведенных в двоичную единицу. При этом ширина полученного интервала может быть вычислена по формуле (2), но поскольку однозначно представимые в исходном тетракоде тетриты 0 и 1 самоуничтожатся операцией вычитания, оценку ширины закодированного интервала можно получить не используя численные значения x_- и x_+ (рис. 2, *а*). Так как значение тетракода сводится к отображению двоичных чисел, а двоичная система счисления является позиционной, то ширина полученного интервала зависит, прежде всего, от позиции группы М в тетракоде, а точнее – от позиции старшего тетрита поля М. Поэтому

$$w = 2^{k+1} - 1, \qquad (3)$$

где k – позиция старшего тетрита t = М в n-разрядном тетракоде: $n-1 \le k \le 0$.

Тетракод с нормированностью второго рода при сведении его к границам интервального числа предполагает определение расстояния q между значениями минимально и максимально возможных границ интервала ($x_-^{\min}$, $x_+^{\min}$ и $x_-^{\max}$, $x_+^{\max}$), имеющих ширину w_1 и w_2 соответственно (рис. 2, *б*):

$$q = x_-^{\max} - x_-^{\min} = x_+^{\max} - x_+^{\min}. \qquad (4)$$

Фактически величина q является расстоянием между двумя интервалами шириной w_1 и w_2, т.е. расстоянием на множестве $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$ целочисленных и вещественных интервалов (поскольку $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$, то множество целочисленных интервалов $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z})$ также является подмножеством множества $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$, т.е. $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Z}) \subset \boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$). Отображение q на множестве $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$ задает метрику, которая является **хаусдорфовой** [8, с. 23]. Хаусдорфова метрика обобщает понятие расстояния между двумя точками в замкнутом метрическом пространстве (в данном контексте таким пространством является множество $\boldsymbol{R}$) на случай пространства всех компактных непустых подмножеств данного пространства. При введении на множестве $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R})$ метрики оно становится топологическим пространством с сохранением понятий сходимости и непрерывности, как и в случае метрического пространства.

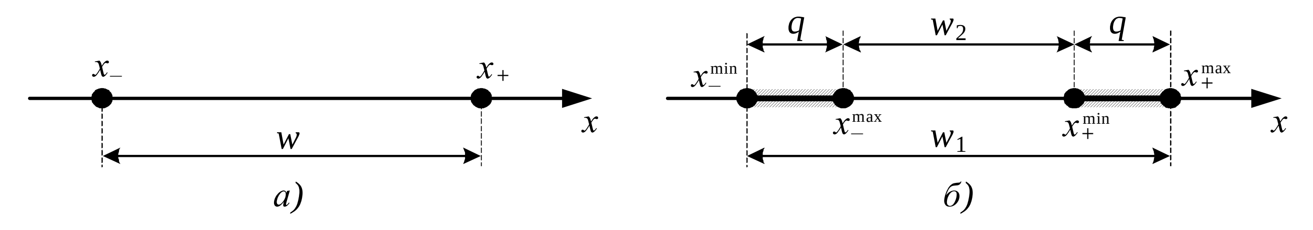


Рисунок 2 – Формирование целочисленных интервальных границ при декодировании нормированного тетракода первого (*а*) и второго (*б*) рода

При сведении к интервальным границам тетракода, обладающего свойствами нормированности второго рода, расстояние w_1 между крайними точками $x_-^{\min}$ и $x_+^{\max}$ определяется аналогично (3), поскольку поле А сводится к двоичным значениям, как и в

поле М (все нули для левой и все единицы для правой границ интервала): $w_1 = w$. Расстояние w_2 между точками $x_-^{\max}$ и $x_+^{\min}$ связано с w_1 соотношением $w_1 = w_2 - 2q$. Точки $x_-^{\min}$ и $x_+^{\max}$ сформированы с позиции учета погрешности, вносимой в значения границ полем А тетракода. При этом максимальное значение q достигается для границ следующим образом:

– для левой границы: при минимальном значении поля М (все тетриты М сводятся к двоичному 0) значение поля А – максимально (все тетриты А принимают значения двоичной 1);

– для правой границы: при максимальном значении поля М (все тетриты М сводятся к двоичной 1) значение поля А – минимально (все тетриты А принимают значения двоичного 0).

Такая концепция предполагает определение параметров w_1 и q, при которых представленные тетракодом границы интервала будут находиться в выделенных на рис. 2, *б* участках числовой оси.

Поскольку на длину q оказывает влияние только значение, возвращаемое полем А тетракода, то ее можно выразить через позицию старшего тетрита поля А:

$$q = 2^{l+1} - 1, \tag{5}$$

где l – позиция старшего тетрита t = А в n-разрядном тетракоде: $k-1 \le l \le 0$ (k – позиция старшего тетрита t = М)

При этом значение w_2 можно определить следующим образом:

$$w_2 = w_1 - 2q = 2^{k+1} - 1 - 2\cdot(2^{l+1} - 1) = 2^{k+1} - 2^{l+2} + 1.$$

При этом возможный диапазон «плавания» границ интервала, обусловленный заполнением поля А случайными двоичными значениями, определяется следующим образом:

1) $[\, x_-^{\min}; x_-^{\max}\,] = [\, x_-^{\max} - q\,; x_-^{\max}\,] = [\, x_-^{\min}; x_-^{\min} + q\,]$ – для левой границы;

2) $[\, x_+^{\min}; x_+^{\max}\,] = [\, x_+^{\max} - q\,; x_+^{\max}\,] = [\, x_+^{\min}; x_+^{\min} + q\,]$ – для правой границы.

В качестве примера можно выполнить сведение 8-разрядного тетракода T с нормированностью второго рода к интервалу X: $T \to X$. Пусть T = 101MMAAA, тогда $k = 4$, $l = 2$. Получим возможный разброс границ $q = 2^3 - 1 = 7$ и максимально возможную ширину $w_1 = 2^5 - 1 = 31$. Таким образом, при любой выборке (наступлении события s_i) с учетом возвращенного полем А случайного набора двоичных чисел, ширина интервала будет не больше $w_1 = 31$ и не меньше $w_2 = 31 - 2\cdot 7 = 17$.

Выполним проверку (↓ — сведение к двоичному 0, ↑ — к двоичной 1):

$$X^{\max} = [x_-^{\min};\ x_+^{\max}] = [101\ \underbrace{00}_{all\,\text{M}\downarrow}\ \underbrace{000}_{all\,\text{A}\downarrow};\ 101\ \underbrace{11}_{all\,\text{M}\uparrow}\ \underbrace{111}_{all\,\text{A}\uparrow}]_2 = [160;\ 191]_{10}.$$

$$X^{\min} = [x_-^{\max};\ x_+^{\min}] = [101\ \underbrace{00}_{all\,\text{M}\downarrow}\ \underbrace{111}_{all\,\text{A}\uparrow};\ 101\ \underbrace{11}_{all\,\text{M}\uparrow}\ \underbrace{000}_{all\,\text{A}\downarrow}]_2 = [167;\ 184]_{10}.$$

Из (4) получаем $q = 160 - 167 = 191 - 184 = 7$. Диапазон «плавания» границ интервала X: [160; 167] – для левой границы; [184; 191] – для правой границы

Формирование вещественных интервальных значений

При сведении тетритов *n*-разрядного «вещественного» тетракода T' (условно разделенного на поля знака, порядка и мантиссы) к вещественному интервалу X' ($X' = [x_-;\ x_+] = \{x \mid x_- \le x \le x_+\},\ \ x \in \boldsymbol{R}$) все оценки возможного размаха интервальных границ определяются аналогично описанным выше целочисленным представлением. Однако сведение тетракода T' к двоичным значениям определяет их формат как формат с плавающей запятой. При этом для расчета ширины предполагаемых диапазонов, а также расстояния между ними следует учитывать некоторые дополнительные параметры: значение порядка, его смещение, а также количество разрядов мантиссы. В таком случае ширина максимально и минимально представимого интервала из T' – w', w_1' и w_2' – определена следующими соотношениями (*F* – коэффициент, учитывающий особенности формата представления чисел с плавающей запятой):

$$w' = F \cdot w; \tag{6}$$

$$w_1' = F \cdot w_1; \tag{7}$$

$$w_2' = F \cdot w_2. \tag{8}$$

Зависимость (6) применима для тетракода с нормированностью первого рода, а зависимости (7), (8) – для тетракода с нормированностью второго рода. Все правила нормированности для «вещественного» тетракода относятся только к полю мантиссы и не предполагают появления неоднозначно представимых тетритов ($t \in \{\text{A}, \text{M}\}$) в поле порядка.

С учетом специфичности форматов чисел с плавающей запятой, «вещественный» тетракод может сводиться к значениям интервальных границ, входящих в области нормализованных (имеющих ненулевое значение в поле порядка) и денормализованных (имеющих нулевое значение в поле порядка) чисел с плавающей запятой [9]. Рассматривать иные особые случаи представления чисел плавающих форматов (не число: NaN; положительная и отрицательная бесконечности: $+\infty$ и $-\infty$) не имеет смысла, так как параметры таких интервалов изначально известны: [NaN; NaN], $[\text{NaN}; -\infty]$ и $[+\infty; \text{NaN}]$ имеют ширину w = NaN; $[-\infty; +\infty]$ имеет ширину $w = +\infty$. Интервалы $[+\infty; +\infty]$ и $[-\infty; -\infty]$ задать с помощью нормированного тетракода невозможно, так как данные интервалы точечные (границы интервалов совпадают), т.е. в плавающих форматах представляют точку на числовой прямой. Таким образом, коэффициент *F* может быть представлен только в двух вариантах: для нормализованных (F_1) и денормализованных (F_2) чисел:

$$F_1 = 2^{E - \exp - m}, \tag{9}$$

$$F_2 = 2^{1 - \exp - m}, \tag{10}$$

где *E* – десятичное значение экспоненты двоичного числа, *m* – количество двоичных разрядов мантиссы (в 32-битном IEEE-754 $m = 23$, в 64-битном – $m = 52$), $\exp = 2^{b-1} - 1$ – заданное смещение экспоненты, имеющей *b* двоичных разрядов (в 32-битном IEEE-754 оно равно +127, в 64-битном – +1023).

На основании (6) – (10) получаем основные зависимости (*k* и *l* – номера старших разрядов полей M и A соответственно):

– для нормализованных чисел:

$$w_1' = w' = 2^{E - \exp - m} \cdot (2^{k+1} - 1); \tag{11}$$

$$w_2' = 2^{E-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 2^{l+2} + 1); \qquad (12)$$

$$q' = F_1 \cdot q = \frac{1}{2} \cdot (w_1' - w_2') = 2^{E-\exp-m} \cdot (2^{l+1} - 1), \qquad (13)$$

– для денормализованных чисел:

$$w_1' = w' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 1); \qquad (14)$$

$$w_2' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{k+1} - 2^{l+2} + 1); \qquad (15)$$

$$q' = 2^{1-\exp-m} \cdot (2^{l+1} - 1). \qquad (16)$$

В качестве примера можно выполнить сведение 32-разрядного «вещественного» тетракода T' с нормированностью второго рода к интервалу X' : $T' \to X'$.

Пусть T' = 1 01111100 10110111001MMMMAAAAAAAA.

Все числа, сводимые данным тетракодом, представляют множество нормализованных чисел с плавающей запятой. Получаем исходные данные: $k = 11$, $l = 7$, $m = 23$, $\exp = 127$, $E = 01111100_2 = 124_{10}$. Используя зависимости (11) – (13), рассчитаем возможный разброс границ интервала:

$$q' = 2^{124-127-23} \cdot (2^8 - 1) = 2^{-26} \cdot 255 = \frac{255}{67108864} = 3,7997961... \cdot 10^{-6} \approx 3,8 \cdot 10^{-6};$$

$$w_1' = 2^{-26} \cdot (2^{12} - 1) = \frac{4095}{67108864} = 6,10202550... \cdot 10^{-5};$$

$$w_2' = 2^{-26} \cdot (2^{12} - 2^9 + 1) = \frac{3585}{67108864} = 5,53420663... \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, при любой выборке (наступлении события s_i) с учетом возвращения полем A случайного набора двоичных чисел, ширина интервала не превысит значение $6,10202550 \cdot 10^{-5}$ и не станет меньше чем $5,53420663 \cdot 10^{-5}$.

Выполним проверку с учетом того, что данный T' сводится к отрицательным числам. Следовательно, числа с большим модулем находятся на отрицательной части числовой оси левее, чем числа с меньшим модулем. Учитывая данную особенность отрицательных чисел, границы максимально и минимально представимых диапазонов формируются следующим образом (↓ – сведение к двоичному нулю, ↑ – сведение к двоичной единице):

$$X'^{\max} = [x_-'^{\min};\ x_+'^{\max}] =$$
$$= [1\ \ 01111100\ \ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,\mathrm{M}\uparrow}\underbrace{11111111}_{all\,\mathrm{A}\uparrow};$$
$$1\ \ 01111100\ \ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,\mathrm{M}\downarrow}\underbrace{00000000}_{all\,\mathrm{A}\downarrow}]_2 =$$
$$= [-0,21447752;\ -0,21441650]_{10}.$$

$$X'^{\min} = [x_-'^{\max};\ x_+'^{\min}] =$$
$$= [1\ \ 01111100\ \ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,\mathrm{M}\uparrow}\underbrace{00000000}_{all\,\mathrm{A}\downarrow};$$
$$1\ \ 01111100\ \ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,\mathrm{M}\downarrow}\underbrace{11111111}_{all\,\mathrm{A}\uparrow}]_2 =$$
$$= [-0,21447372;\ -0,21442030]_{10}.$$

Из (4) получаем

$q' = -0,21447372 + 0,21447752 = -0,21441650 + 0,21442030 = 3,8 \cdot 10^{-6}.$

Диапазон «плавания» границ интервала X':

– $[-0,21447752; -0,21447372]$ –для левой границы;

– $[-0,21442030; -0,21441650]$ – для правой границы

Описанная в данном разделе методика сведения *n*-разрядного нормированного «вещественного» тетракода к вещественному интервалу приводит к извлечению границ интервала одного знака, т.е. к таким интервальным числам, которые могут занимать позиции либо на положительной, либо на отрицательной полуосях вещественных чисел. Следовательно, данная техника кодирования не является достаточной, поскольку исключает представление интервала, содержащего нулевое значение. Таким образом, для представления интервала X'' ($X'' = [x_-;\ x_+] = \{x \mid x_- \le x \le x_+\},\ x \in \boldsymbol{R},\ 0 \in X''$) формируется нормированный «вещественный» тетракод T'', содержащий в поле знака тетрит $t = $ M. Такой тетракод отвечает обозначенным требованиям к нормированности (относящихся прежде всего к полю мантиссы) и сводится к интервальным границам, аналогично описанной выше методике, однако при формировании левой границы тетрит M в поле знака сводится к двоичной 1 (формируется отрицательное значение), а при формировании правой границы – к двоичному 0 (формируется положительное значение).

На рис. 3 представлены соотношения интервалов X'' и X', декодированных из идентичных «вещественных» тетракодов T' (в поле знака однозначно представимые значения тетритов 0 ($X' > 0$) или 1 ($X' < 0$)) и T'' (в поле знака значение M) с идентичными значениями полей мантиссы и порядка. Поскольку интервал X'' объединяет зеркальное отображение интервала X' на отрицательной и положительной полуосях, то интервальные оценки данных интервалов связаны, и основная оценка – расстояние d'' – определима следующим образом: $d'' = w_1'$.

Следовательно,

– для нормализованных чисел:

$$d'' = 2^{E - \exp - m} \cdot (2^{k+1} - 1); \tag{17}$$

– для денормализованных чисел:

$$d'' = 2^{1 - \exp - m} \cdot (2^{k+1} - 1). \tag{18}$$

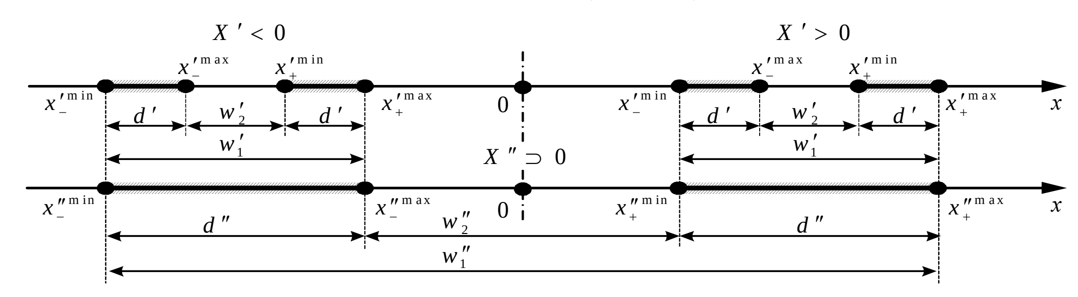


Рисунок 3 – Формирование вещественных интервальных границ для интервала, содержащего нулевое значение

Значения ширины w_1'' и w_2'' зависят от всех разрядов поля мантиссы в тетракоде (в первую очередь от однозначно представимых значений тетритов, поскольку при нахождении расстояния между границами интервала с противоположными знаками их значения складываются) и принимают различные значения в каждом отдельном случае. И, наконец, если интервал X'' представлен тетракодом T'' с нормированностью первого

рода, то середина такого интервала будет всегда равна нулевому значению, что обусловлено симметричному расположению границ интервала относительно нуля. При использовании «вещественного» тетракода T'' с нормированностью второго рода такая симметрия будет нарушена, поскольку для каждой из границ все тетриты поля А будут сводиться к различным наборам двоичных чисел.

Появление тетрита М в знаковом разряде переопределяет принципы получения минимально и максимально допустимых значений границ интервала. Однако стоит отметить одинаковость поведения полей М и А, поэтому в формулах (17) – (18) не используется значение l – позиция старшего тетрита А.

Для наглядного представления описанных выше положений рассмотрим сведение 32-разрядного «вещественного» тетракода T'' (аналогичного T' из предыдущего примера) к интервалу $X'' : T'' \to X''$.

Пусть T'' = М 01111100 10110111001MMMMAAAAAAAA.

Получаем исходные данные: $k = 11$, $m = 23$, exp = 127, $E = 01111100_2 = 124_{10}$. Используя зависимости (11) – (13) рассчитаем возможный разброс границ интервала:

$$q'' = 2^{124-127-23} \cdot (2^{12} - 1) = \frac{4095}{2^{-26}} = 6{,}10202550... \cdot 10^{-5} \approx 6{,}102 \cdot 10^{-5}.$$

Выполним проверку ($\downarrow$ – сведение к двоичному нулю, $\uparrow$ – сведение к двоичной единице):

$$\begin{aligned} X''^{\max} &= [x''^{\min}_{-};\ x''^{\max}_{+}] = \\ &= [\underbrace{1}_{\text{M}\uparrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,\text{M}\uparrow}\underbrace{11111111}_{all\,\text{A}\uparrow}; \\ &\quad \underbrace{0}_{\text{M}\downarrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{1111}_{all\,\text{M}\uparrow}\underbrace{11111111}_{all\,\text{A}\uparrow}]_2 = \\ &= [-0{,}21447752;\ 0{,}21447752]_{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X''^{\min} &= [x''^{\max}_{-};\ x''^{\min}_{+}] = \\ &= [\underbrace{1}_{\text{M}\uparrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,\text{M}\downarrow}\underbrace{00000000}_{all\,\text{A}\downarrow}; \\ &\quad \underbrace{0}_{\text{M}\downarrow}\ 01111100\ 10110111001\underbrace{0000}_{all\,\text{M}\downarrow}\underbrace{00000000}_{all\,\text{A}\downarrow}]_2 = \\ &= [-0{,}21441650;\ 0{,}21441650]_{10}. \end{aligned}$$

Из (4) получаем

$$q'' = -0{,}21441650 + 0{,}21447752 = 0{,}21447752 - 0{,}21441650 = 6{,}102 \cdot 10^{-5}.$$

Диапазон «плавания» границ интервала X'':

– $[-0{,}21447752; -0{,}21441650]$ – для левой границы;

– $[0{,}21441650; 0{,}21447752]$ – для правой границы

Выводы

В данной работе рассмотрены особенности сведения нормированных тетракодов к значениям границ интервалов. Используя выведенные в работе соотношения, можно провести интервальное оценивание и получить необходимые метрики интервального числа, границы которого представлены тетракодом, не прибегая к его декодированию в

двоичные/десятичные значения. При этом показана возможность эффективного хранения интервальных чисел в виде тетракодов с возможностью их дальнейшего использования в постбинарных компьютерных системах.

Актуальность работы в плане практической реализации нацелена на недалекое будущее, в котором внедрение средств постбинарного компьютинга несомненно приведет к развитию множества математических структур, в числе которых может оказаться и постбинарная интервальная арифметика как структура, определившая арифметические интервальные операции для нормированных тетракодов. Такая структура сможет использовать тетракоды в качестве операндов и применять к ним постбинарные логические и арифметические операции, реализация которых уже сегодня заложена в основу разработки алгебры тетралогики [6], [7].

Литература

1. Аноприенко А.Я. Тетралогика и тетракоды / А.Я. Аноприенко // Сборник трудов факультета вычислительной техники и информатики. – Донецк : ДонГТУ, 1996. – Вып. 1. – С.32-43.
2. Иваница С.В. Особенности реализации операций тетралогики / С.В. Иваница, А.Я. Аноприенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Вып. 13 (185). – Донецк : ДонНТУ, 2011. – С. 134-140. – (Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2011)).
3. Аноприенко А.Я. Обобщенный кодо-логический базис в вычислительном моделировании и представлении знаний: эволюция идеи и перспективы развития / А.Я. Аноприенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Донецк : ДонНТУ, 2005. – Вып. 93. – С. 289-316. – (Серия «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2005)).
4. Аноприенко А.Я. Археомоделирование: модели и инструменты докомпьютерной эпохи / А.Я. Аноприенко. – Донецк : УНИТЕХ, 2007. – 318 с.
5. Аноприенко А.Я. Особенности постбинарного кодирования на примере интервального представления результатов вычислений по формуле Бэйли-Боруэйна-Плаффа / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Научные труды Донецкого национального технического университета.– Донецк : ДонНТУ, 2010. – Вып. 11 (164). – С. 19-23. – (Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2010)).
6. Аноприенко А.Я. Особенности реализации операций тетралогики / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Донецк : ДонНТУ, 2011. – Вып. 13 (185). – С. 134-140. – (Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2011)).
7. Аноприенко А.Я. Особенности реализации постбинарных логических операций / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Искусственный интеллект. – 2011. – № 2. – С. 110-121.
8. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – Москва : Мир, 1987.
9. Фролов А.В. Аппаратное обеспечение персонального компьютера / А.В. Фролов, Г.В. Фролов // Библиотека системного программиста.– М. : Диалог-МИФИ, 1997. – Т. 33. – 304 с.

Literatura

1. Anoprienko A.Ja. Sbornik trudov fakul'teta vychislitel'noj tehniki i informatiki.Vyp. 1. Doneck. DonGTU, 1996, S. 32-43
2. Ivanica S.V., Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional’nogo tehnicheskogo universiteta. Serija: “Informatika, kibernetika i vychislitel’naj atehnika” (IKVT–2011). Vypusk 13 (185).Doneck: DonNTU. 2011. S. 134-140
3. Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional’nogo tehnicheskogo universiteta. Serija “Informatika, kibernetika i vychislitel’naja tehnika” (IKVT-2005).Vypusk 93. Doneck: DonNTU. 2005. S. 289-316.
4. Anoprienko A.Ja. Arheomodelirovanie: modeliiinstrumentydokomp'juternojjepohi.Doneck: UNITEH. 2007. 318 s.

5. AnoprienkoA.Ja.,Ivanica S.V. NauchnyetrudyDoneckogonacional'nogotehnicheskogouniversiteta. Serija: "Informatika, kibernetikaivychislitel'najatehnika» (IKVT-2010). Vypusk 11 (164).Doneck: DonNTU. 2010. S. 19-23.
6. Ivanica S.V., Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta. Serija: "Informatika, kibernetika i vychislitel'naja tehnika" (IKVT-2011). Vypusk 13 (185). Doneck: DonNTU. 2011. S. 134-140.
7. Anoprienko A.Ja.,Ivanica S.V. Iskusstvennyj intellect. № 2. 2011. S. 110-121.
8. Alefel'd G., Hercberger Ju. Vvedenie v interval'nye vychislenija.Moskva: Mir. 1987.
9. Frolov A.V., Frolov G.V. Apparatnoe obespechenie personal'nogo komp'jutera. Biblioteka sistemnogo programmista. Tom 33. M.: Dialog-MIFI. 1997. 304 s.

A.Ja. Anoprienko, S.V. Ivanitsa

Representation of Interval Numbers by Means of Postbinary Coding

Peculiarities of representation (positioning on the number line) for integer and real intervals as tetracode are analyzed in the article. Ratio of ranges of values for "floating" borders, i.e. the width of their marginal fluctuations is deduced. The basic relationships for determining the parameters of interval estimation are shown and illustrative examples for their implementation are given.

Availability of M-tetrits in tetracode involves its reduction to a set of binary values, i.e., virtually closed numerical gap. This numerical gap is called an interval, which is a set of values that lie within its borders.

The structure of tetracode with position of location tetrits M- and A-tetrits gives it the so-called regulation, which is determined by combination of the following criteria:

- Tetrits 0 and 1 are main components of the information and actually determine the position of numbers in the number line;
- Presence of "M-group". The presence of tetrit or a group of M-tetrits requires the represence of bounds of the interval: M-group is indissoluble and is located in the junior ranks of tetracode;
- Presence of "A-group". The presence of tetrit or a group of A-tetrits is optional, but it has clarifying character for represence of bounds of the interval: A-group is indissoluble and has a lower level of tetracode than M-group has;
- Between M- and A-groups, it is not allowed appearance of uniquely representable tetrits 0 and 1.

This article describes features for obtaining of normalized tetracodes to values of boundaries of intervals. Using the derived relations, one can work to interval estimation and obtain metric of an interval, which boundaries are tetracode, without decoding it into binary/decimal values. At the same time, the possibility for efficient storage of interval numbers as tetracode with possibility of their further use in postbinary computer systems is shown.

Relevance of this work in terms of practical implementation is aimed at not too distant future, in which the introduction of postbinary computing will undoubtedly lead to the development of a set of mathematical structures, among which may be an interval arithmetic and postbinary as a structure that defined the interval arithmetic operations for normalized tetracode. Such a structure can be used as tetracode operands, and apply postbinary logical and arithmetic operations that is already today the basis for development of tetralogic algebra.

Статья поступила в редакцию 19.12.2011.